

Fiche pédagogique pour les coniques

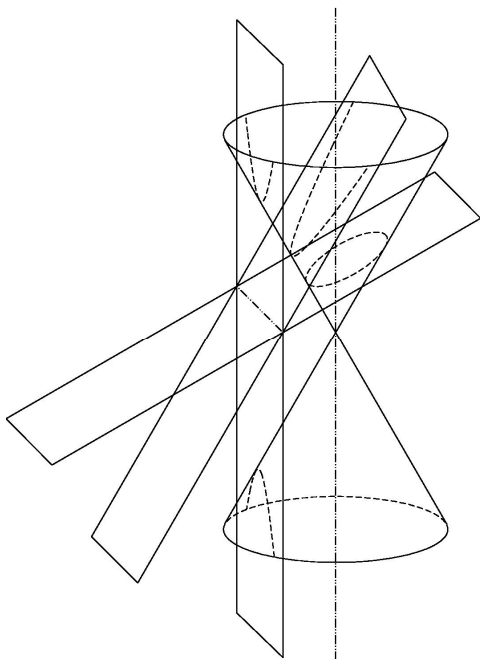
Pour les plus jeunes

Les dessins dans le sable peuvent permettre d'amener une définition du cercle.

Lorsque les deux foyers d'une ellipse sont confondus, on obtient une figure dont tous les points sont à distance constante d'un point donné, ce qui est une définition du cercle. C'est cette définition, qui équivaut à la « définition du jardinier », que l'on utilise lorsqu'on trace des cercles au compas.

Pour les plus grands

Faire des mathématiques, c'est apprendre à reconnaître des comportements similaires dans des situations apparemment très différentes. Ceci permet d'utiliser des méthodes identiques pour répondre à des problèmes similaires dans des contextes différents. Les coniques sont un excellent exemple d'un tel lien.



Deux siècles avant J-C, Apollonius de Perge décrit les coniques comme l'intersection d'un cône et d'un plan ; le fait d'obtenir une ellipse, une parabole ou une hyperbole découlant du choix de l'angle entre le plan et l'axe du cône.

L'ellipse est alors définie par l'intersection d'un cône avec un plan formant un angle plus grand que l'angle d'ouverture du cône.

Cependant, les jardiniers utilisent une autre définition de l'ellipse : l'ensemble des points d'un plan dont la somme des distances à deux points fixes est constante. Ces points sont appelés les foyers de l'ellipse. (Des définitions similaires existent aussi pour la parabole et l'hyperbole.) C'est cette définition que vous utilisez lorsque vous tracez l'ellipse dans le sable.

La preuve ci-dessous de l'équivalence de ces deux définitions est due à Germinal Dandelin (1794-1847). Elle se base sur l'existence de deux sphères à la fois tangentes au cône et au plan.

Théorème : la section d'un cône par un plan est une ellipse dont les foyers sont le point de contact de ce plan avec des sphères qui lui sont tangentes et inscrites dans le cône.

Dans ce théorème, on entend par ellipse l'ensemble des points d'un plan dont la somme des distances à deux points fixes est constante.

Etape 0

Qu'est-ce qu'un cône ?

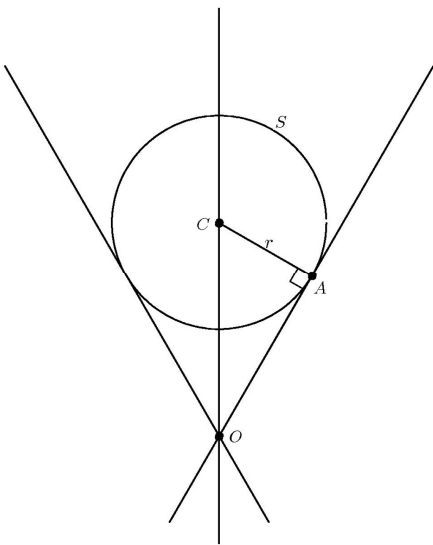
On utilisera la définition suivante :

On fixe un point O et une sphère. Un cône est l'ensemble des droites passant par le point O et tangentes à la sphère. On appelle ces droites des *généatrices* du cône

On se convainc aisément que le même cône peut être défini par une infinité de sphères.

Etape 1

On montre que, pour toutes les droites passant par un point O donné et tangentes à une sphère fixée, la distance du point O au point de tangence est constante.



Soit A un point de tangence entre la sphère S et une génératrice du cône. Soient C le centre et r le rayon de la sphère S .

Considérons l'intersection du cône avec le plan contenant les trois points O , A et C (voir figure). Comme la génératrice OA est tangente à S , le triangle OAC est rectangle en A . Le théorème de Pythagore implique donc que

$$OA = \sqrt{OC^2 - r^2}$$

Ce qui est indépendant du point de tangence A . Autrement dit, en appliquant le raisonnement précédent à n'importe quel autre point de tangence entre S et une génératrice du cône, on obtient le même résultat.

Etape 2

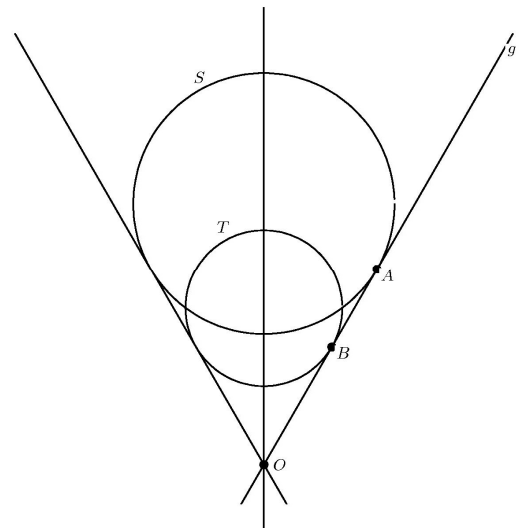
On montre que, pour toutes les droites passant par un point P donné et tangentes à deux sphères fixées, la distance entre le point de tangence sur la première sphère et celui sur la deuxième est constante.

Supposons que S et T sont des sphères inscrites dans le cône. Soient O le sommet et g une génératrice du cône. Soit A le point de tangence entre S et g , et soit B le point de tangence entre T et g .

Comme S et T sont du même côté du sommet O , alors

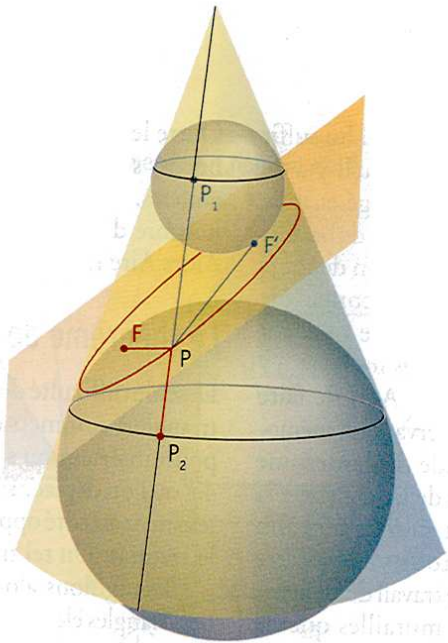
$$AB = |OA - OB|$$

Par l'étape 1, les distances OA et OB sont indépendantes de la génératrice g choisie. La distance AB l'est donc aussi.



Etape 3

La démonstration



Soit p un plan intersectant le cône et S_1 et S_2 les deux sphères tangentes à p inscrites dans le cône.

Notons F et F' les points de tangence entre le plan et les sphères S_1 et S_2 respectivement.

Soit P un point sur l'intersection entre le cône et le plan p et soit g la génératrice du cône passant par P .

Les cercles de contact des sphères et du cône sont coupés par g aux points P_1 et P_2 .

- Observons les points P , F' et P_1 (en bleu sur le dessin) :
Les droites PF' et PP_1 sont tangentes à la sphère S_1 .
Donc, par l'étape 1, les distances PF' et PP_1 sont égales.
- Observons les points P , F et P_2 (en rouge sur le dessin) :
Les droites PF et PP_2 sont tangentes à la sphère S_2 .
Donc, par l'étape 1, les distances PF et PP_2 sont égales.

Comme P , P_1 et P_2 appartiennent tous trois à la droite g et

que P est entre P_1 et P_2 , nous avons :

$$PP_1 + PP_2 = P_1P_2$$

Mais aussi :

$$PF' + PF = P_1P_2$$

Comme ce raisonnement est vrai pour toute génératrice g du cône et que, par l'étape 2, la distance P_1P_2 est constante pour toutes les génératrices du cône, on a montré que

$$PF' + PF = \text{constante}$$

Donc la courbe obtenue est une ellipse.

Remarque : on a ici démontré que la courbe obtenue par l'intersection d'un certain plan avec le cône est une ellipse. Cependant, pour démontrer l'équivalence entre les deux définitions, il faut aussi montrer qu'une courbe telle que la somme des distances aux foyers est constante est bien l'intersection d'un cône et d'un plan. Voici donc la démonstration de la réciproque :

Théorème : Soit p un plan dont l'intersection avec un cône est une ellipse (selon la première définition). Si Q est un point de p qui ne se trouve pas sur l'ellipse, alors

$$QF + QF' \neq \text{constante.}$$

Remarque : ce théorème est en fait la contraposée de la réciproque.

Démonstration : Appelons k la constante.

Soit Q un point du plan p n'appartenant pas à l'ellipse. Si $Q = F'$, alors

$$QF + QF' = FF' < k$$

Supposons donc que $Q \neq F'$. Soit P le point d'intersection de l'ellipse avec la demi-droite $[F'Q]$.

Si Q est à l'intérieur de l'ellipse, alors, par l'inégalité du triangle,

$$QF + QF' < \underline{QP} + PF + \underline{QF'} = PF_1 + \underline{PF'} = k$$

D'autre part, si Q est à l'extérieur de l'ellipse, alors

$$QF + QF' = \underline{QF} + \underline{QP} + \underline{PF'} > \underline{PF} + PF' = k$$

