

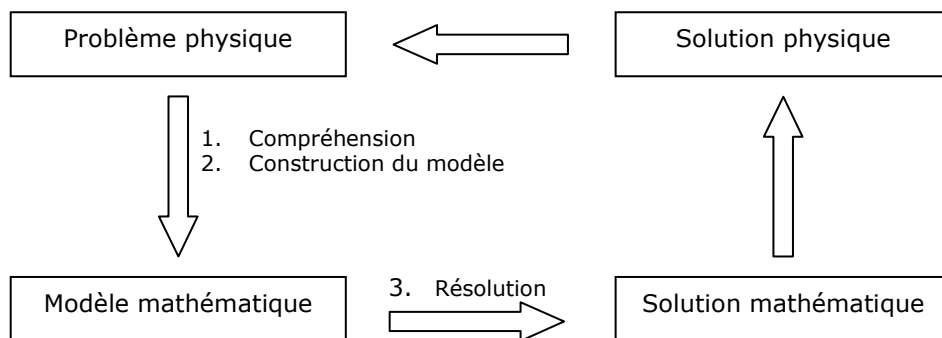
Fiche pédagogique - Percolation

Le but de cette activité est de donner un exemple de modélisation mathématique d'un problème physique.

L'idée de modélisation est une notion très importante dans les mathématiques et leur enseignement. Dans l'activité présentée, il s'agit de modéliser le passage d'un liquide au travers d'un matériau poreux. Cependant, les mathématiques utilisées dans la résolution de ce problème sont très complexes et encore en développement, notamment à la Section de mathématiques de l'université de Genève.

Que veut dire « modéliser » ?

Vous avez un problème physique que vous cherchez à comprendre. Schématisons l'approche scientifique type :



A. Du problème physique au modèle mathématique

1. **Compréhension** : il faut tout d'abord comprendre quel est le problème que nous voulons résoudre et quelles sont les variables pertinentes, c'est-à-dire les éléments dont le changement, la variation, a une influence sur le problème.

Expérimentalement, on remarque que plus le matériau (café, terre) est tassé, plus le liquide (l'eau) pénètre difficilement. De plus, on constate qu'à partir d'un certain degré de tassement, l'eau ne pénètre plus du tout. Le problème serait donc de déterminer théoriquement ce seuil critique.

Pour cela, on considère comme variable le fait que le matériau soit plus ou moins tassé, c'est-à-dire la quantité de vide qui se trouve entre les grains de matière.

2. **Construction du modèle** : cette étape est la modélisation à proprement parler. La réalité est toujours trop complexe pour être appréhendée complètement. Un modèle n'est donc qu'une simplification de la réalité permettant néanmoins de décrire celle-ci.

Décrire expérimentalement revient à quantifier certaines données observables. C'est pourquoi un modèle est un objet mathématique reliant certaines variables entre elles.

Bien que le matériau soit en trois dimensions, nous allons plutôt considérer des coupes bidimensionnelles.

Le matériau est constitué de grains de matière. Pour notre modèle, nous allons considérer ces grains comme des hexagones réguliers tous identiques. Notre espace est donc un morceau de plan pavé d'hexagones réguliers (voir visuels). Les grains de matière ne se répartissent pas uniformément dans l'espace mais de manière « aléatoire ». En mathématiques, qui dit aléatoire dit « probabilités ». Autrement dit, pour chacune des cases du pavage, il y a une certaine probabilité pour qu'elle soit vide ou remplie de matière. Soit p la probabilité qu'une case soit vide.

On remarque très vite que plus p est grand, plus il y a de vide, on a donc un modèle de matériau pas tassé. Inversement, plus p est petit, moins il y a de vide, donc on a un modèle de matériau tassé.

Donc p est bien la variable que l'on doit étudier.

B. Du modèle mathématique à la solution mathématique

- 3. Résolution :** Résoudre revient à décrire **explicitement** la variation d'une ou plusieurs quantités observables en fonction d'autres paramètres variables.

La résolution de ce problème est actuellement un sujet de recherche avancée. De nombreux chercheurs, dont les professeurs S. Smirnov et I. Velenik de l'Université de Genève, travaillent à la détermination théorique de seuils critiques dans des problèmes similaires ainsi qu'à d'autres questions liées à ce problème.

Un modèle permet aussi de prédire le comportement du problème physique étudié ; pensons aux modèles météorologiques. Ces prédictions permettent de plus de vérifier la qualité du modèle.

Vous trouvez ci-joints les trois visuels présentés sur le panneau de l'activité.

Dans le premier (nommé Fig. 2 sur le panneau), la probabilité qu'une case soit rouge est de 40% ; il n'y a pas de chemin : on a modélisé un tube où l'eau stagne.

Dans le deuxième (nommé Fig. 1 sur le panneau), la probabilité qu'une case soit rouge est de 48% ; un chemin rouge existe, mais il est difficile à trouver : c'est le modèle d'un tube où l'eau s'infiltré lentement.

Dans le troisième (nommé Fig. 3 sur le panneau), la probabilité qu'une case soit rouge est de 52% ; il est très facile de passer de haut en bas en suivant les cases rouges : c'est le modèle d'un tube où l'eau s'écoule vite.

