Fiches pédagogiques pour les pavages

Il s'agit tout d'abord de faire remarquer la différence entre le pavage d'une surface avec bord et celle d'une surface illimitée (ou, ce qui revient au même, à ne pas tenir compte des bords éventuels).

Dans le premier cas, les bords amènent une contrainte supplémentaire propre à la forme particulière de la surface. D'où le fait que dans la pratique, les carreleurs se permettent de couper les pavés pour faire l'ajustement au bord. Dans le deuxième cas, l'intérêt se porte sur les propriétés des pièces qui peuvent paver le plan.

Pour les élèves du primaire, la découverte des pavages est déjà intéressante en soi. Elle peut être suivie par des activités amenant à la justification des résultats observés. Plusieurs telles activités ont été proposées dans le cadre de la semaine de la géométrie (voir référence). Par exemple, vous trouvez ci-après l'activité « recouvrir un carré » destinée aux degrés 1P à 4P.

Les activités supposant un raisonnement déductif pour justifier une observation sont destinées à des élèves plus âgés, par exemple dès le 7CO. Pour permettre des démonstrations ne dépendant que des pavés, mais pas de la surface à paver, on s'intéressera alors à la deuxième question. Dans ce cas, après avoir essayé de paver le plan avec les diverses formes proposées, on pourra essayer de faire conjecturer aux élèves que

A) Tout triangle pave le plan.
B) Tout quadrilatère pave le plan.
C) Que les seuls polygones réguliers pavant le plan sont le triangle équilatéral, le carré et l'hexagone.

Ces conjectures sont démontrables via la géométrie déductive.
Pour les deux premières, il faut savoir que la somme des angles d'un triangle vaut 180 degrés.
Pour la troisième, un raisonnement utilisant la valeur de l'angle en un sommet d'un polygone régulier permet de conclure.
Ces trois conjectures ont été proposées dans le cadre de la semaine de la géométrie en 2004.
Dans la suite du document, vous trouverez la documentation permettant de démontrer ces trois conjectures. Cette documentation se trouve également sur le site de la semaine de la géométrie (voir référence). Vous y trouverez en outre d'autres activités en lien avec les pavages. Consultez-les pour voir lesquelles pourraient convenir à votre enseignement.
Notez toutefois que les sites proposés à l'époque ne sont plus tous accessibles, il reste néanmoins quelques liens intéressants.

Références : - la semaine sur les pavages
http://php.educanet2.ch/math/semainegeometrie/pres.html

Activité « Recouvrir un carré 1P-2P-3P-4P »

Titre de l'activité	Paver un carré
Type d'activité	Découverte – déduction
Degrés scolaires indicatifs	1P-2P-3P-4P
Enoncé destiné aux élèves	Quelles sont les pièces qui permettent de paver exactement le carré - sans trou ni chevauchement - en utilisant toujours la même pièce ? Dessinez vos solutions.
Matériel	Une boîte de surfaces ASEN complète Un carré de 20x20 cm, en mi-carton, par élève Des feuilles de 20x20 cm
Durée	30-45 minutes
Propositions de déroulement	Recherche collective (en groupe de 3 élèves).
Références aux contenus d'enseignement, plans d'études et moyens d'enseignement	Reconnaître, décrire et nommer des surfaces selon leur forme. Décomposer une surface en surfaces élémentaires. Reproduire des figures géométriques Comparer des grandeurs par manipulation de surfaces.
Analyse préalable de l'activité (démarches prévisibles des élèves, interventions de l'enseignant)	Certaines pièces ne se trouvent pas en nombre suffisant pour paver effectivement le carré. Les élèves devront donc extrapoler. 10 pièces permettent de paver le carré de 20x20 : 2 carrés (10x10 et 5x5), 2 rectangles (10x5 et 5x2,5), les 4 triangles isocèles rectangles, et 2 triangles rectangles non-isocèles (les moitiés des rectangles ci-dessus).
Notions mathématiques susceptibles d'être mises en évidence	Figures géométriques (similitudes et particularités) Mesure d'aire
Développements possibles	
Liens interdisciplinaires	

Conjecture A) « Les triangles pavent »

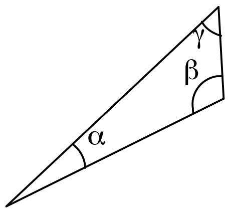
Titre de l'activité	Les triangles pavent-ils le plan?
Type d'activité	Situation problème ouvert. Activité déductive avec justification. Cette activité devrait suivre une activité de découverte des pavages.
Degrés scolaires indicatifs	8-9-10-11
Enoncé destiné aux élèves	Quels types de triangle pavent le plan ?
Connaissances mathématiques nécessaires	La somme des angles d'un triangle vaut 180 degrés.
Matériel	Papier quadrillé ou blanc et règle graduée
Durée	45mn-60mn
Propositions de déroulement	Travail en petits groupes. Demander d'essayer de paver le plan avec plusieurs types de triangles, puis de donner les raisons qui font que tel type de triangle pavent le plan. Après 30 minutes, confronter les résultats, puis donner une preuve si cela n'a pas encore été fait par les élèves.
Références aux contenus d'enseignement, plans d'études et moyens d'enseignement	La somme des angles d'un triangle vaut 180 degrés. Egalité des angles alternes internes. Cas d'égalité des triangles.
Analyse préalable de l'activité (démarches prévisibles des élèves, interventions de l'enseignant)	Résultats possibles justes: triangles équilatéraux, rectangles, Résultats possibles faux: isocèle dont l'angle au sommet divise 360. Dans le cas d'argumentation visuelle du style « on voit que ça marche », on peut introduire un problème paradoxal, style Lewis Carrol. Donner une preuve, soit par un élève soit par l'enseignant, si possible en partant des résultats obtenus par les élèves. Dans le cas où la preuve serait vite trouvée, passer au quadrilatères.
Notions mathématiques susceptibles d'être mises en évidence	La somme des angles d'un triangle vaut 180 degrés. Le théorème des angles alternes-internes. Une diagonale d'un parallélogramme détermine deux triangles égaux.
Développements possibles	Les quadrilatères pavent L'hexagone pavent partir du triangle équilatéral.
Liens interdisciplinaires	

Annexe à l'activité « Les triangles pavent »

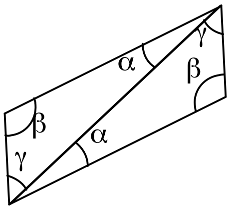
Une démonstration que les triangles pavent le plan.

Soit T un triangle.

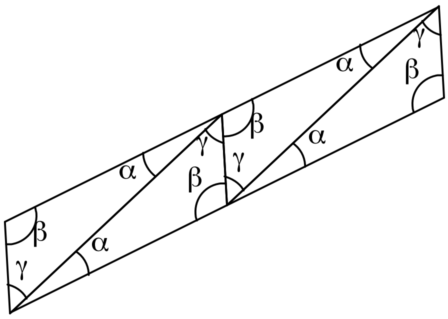
Appelons ces angles : α, β et γ.



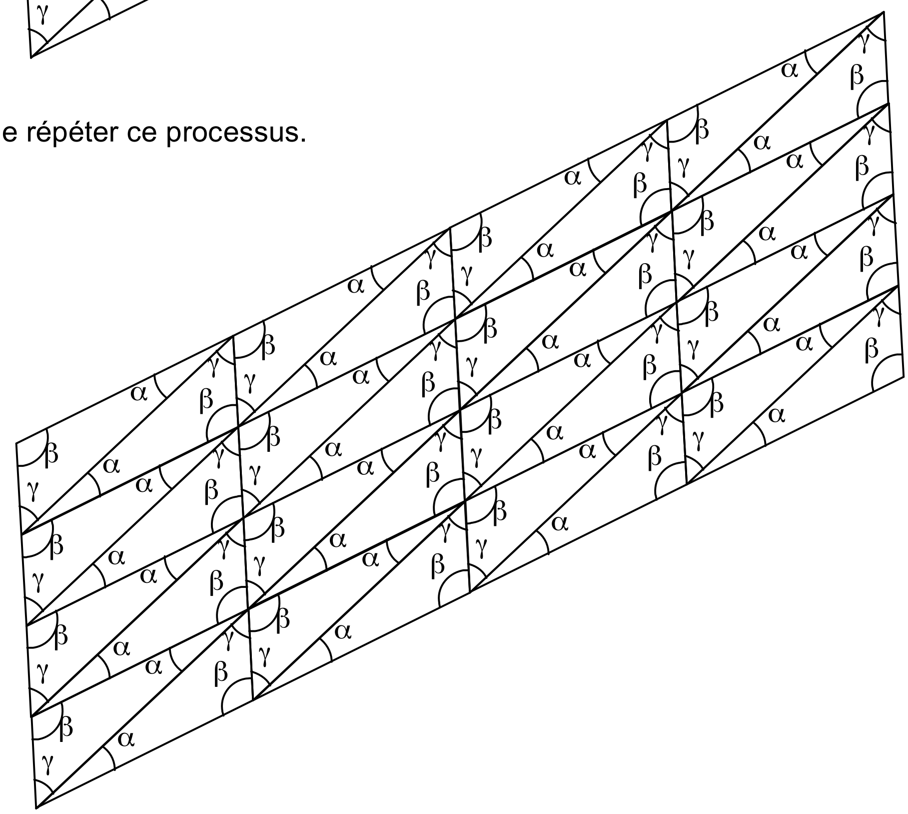
Faisons une rotation de 180° d'une copie de ce triangle au milieu d'un ses côtés.
Nous obtenons un parallélogramme, car les angles alternes-internes sont égaux.



En disposant un parallélogramme isométrique sur un de ses côtés, nous obtenons à nouveau un parallélogramme, car la somme des angles d'un triangle vaut un angle plat (180°) et que si deux droites sont parallèles à une troisième, elles sont parallèles entre elles.



Il suffit de répéter ce processus.



Conjecture B) « Les quadrilatères pavent »

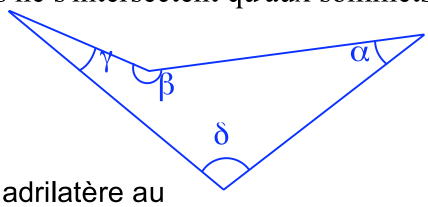
Titre de l'activité	Quels quadrilatères pavent le plan?
Type d'activité	Situation problème ouvert. Activité déductive avec justification. Cette activité devrait suivre une activité de découverte des pavages.
Degrés scolaires indicatifs	8-9-10-11
Enoncé destiné aux élèves	Quels types de quadrilatères pavent le plan?
Connaissances mathématiques nécessaires	La somme des angles d'un triangle vaut 180 degrés. La notion de quadrilatère simple. La somme des angles d'un quadrilatère simple vaut 360 degrés.
Matériel	Papier blanc ou quadrillé, règle graduée
Durée	45mn-70h
Propositions de déroulement	Laisser les élèves en petits groupes, demander d'essayer de paver le plan avec plusieurs quadrilatères et de dire quels types de quadrilatère pavent le plan. Après 30 minutes, confronter les résultats, puis donner une preuve si cela n'a pas encore été fait par les élèves.
Références aux contenus d'enseignement, plans d'études et moyens d'enseignement	La somme des angles d'un triangle vaut 180 degrés. Détermination et propriétés des quadrilatères.
Analyse préalable de l'activité (démarches prévisibles des élèves, interventions de l'enseignant)	Une preuve du fait que tout quadrilatère pave le plan devrait être donnée à la fin de l'activité.
Notions mathématiques susceptibles d'être mises en évidence	La somme des angles d'un triangle vaut 180 degrés. Le théorème des angles alternes-internes.
Développements possibles	Pavages par bandes (ligne brisée ou courbe) Périodicité.
Liens interdisciplinaires	Mouvement ondulatoire.

Annexe à l'activité « Les quadrilatères pavent »

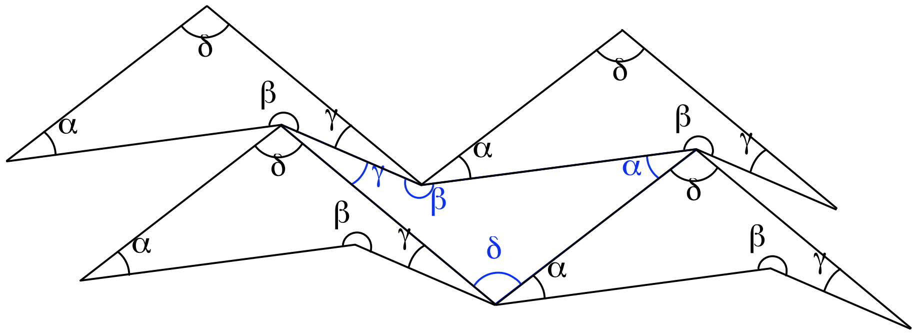
Démonstration que les quadrilatères dont les côtés ne s'intersectent qu'aux sommets pavent le plan.

Soit Q un quadrilatère simple.

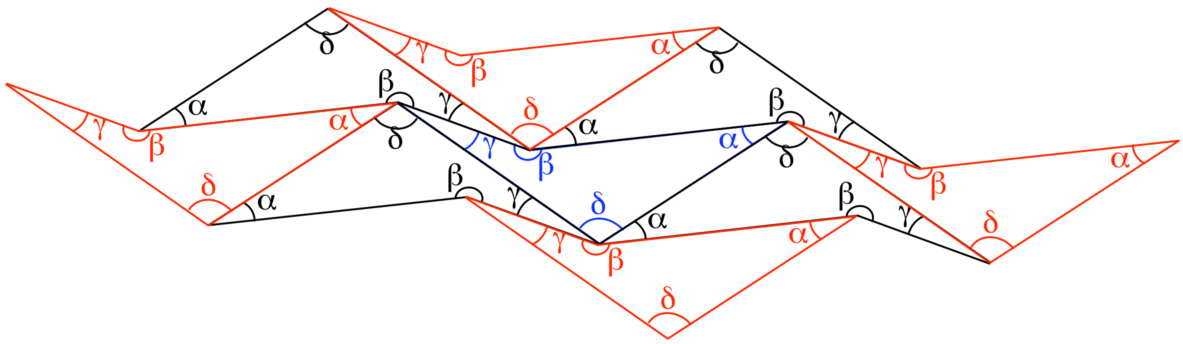
Appelons ces angles : α, β, γ et δ.



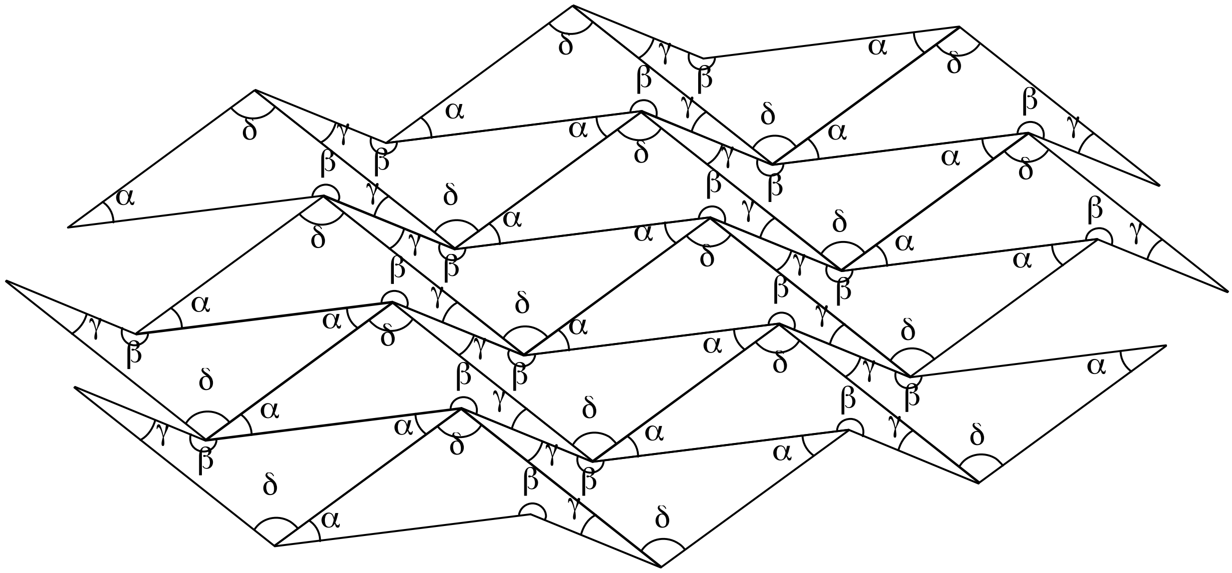
Faisons une rotation de 180° d'une copie de ce quadrilatère au milieu de chacun de ses côtés, il faut donc quatre copies. Nous



Les côtés se confondent, car chacun des sommets d'un côté est se retrouve sur l'autre sommet du même côté.
En chaque sommet du quadrilatère de départ, il y a maintenant trois angles.
Chacun est isométrique à un des angles de Q.
En chacun de ces quatre sommets, l'angle que forme la partie non pavé du plan est isométrique au quatrième angle de Q, car la somme des angles d'un quadrilatère simple vaut un angle plein (360°).
Il suffit donc d'y "mettre" une copie de Q. Pour la même raison que ci-dessus, les côtés se confondent.

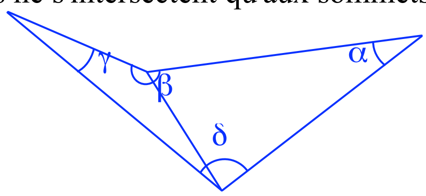


Et ainsi de suite …



Annexe à l’activité « Les quadrilatères pavent »

Démonstration que les quadrilatères dont les côtés ne s'intersectent qu'aux sommets pavent le plan.



Soit Q un quadrilatère simple.

Appelons ces angles : α, β, γ et δ.

Construisons la diagonale (ou une des diagonales) issue du (d'un des) sommet(s) ayant le plus grand angle, elle est obligatoirement à l'intérieur du quadrilatère.

Dans notre exemple : [BD]

Cela donne deux triangles.

La même démarche que le pavage par un pavé de forme triangulaire donnera un pavage du plan.

Conjecture C) « Pavages par polygones réguliers »

Titre de l'activité	Pavages par polygones réguliers.
Type d'activité	Situation problème ouvert. Activité déductive avec justification. Cette activité devrait suivre une activité de découverte des pavages.
Degrés scolaires indicatifs	8-9-10-11
Enoncé destiné aux élèves	Quels sont les polygones réguliers qui pavent le plan?
Connaissances mathématiques nécessaires	Notion de polygone régulier, somme des angles d'un triangle vaut 180 degrés.
Matériel	
Durée	40-45 min
Propositions de déroulement	Laisser les élèves réfléchir un moment seuls ou par groupes. Après un moment si les élèves ont obtenus le carré et ou le triangle relancer par l'hexagone. S'ils trouvent les trois et ne ressentent aucun besoin de justification autre que d'avoir trouvé. Essayer de susciter le besoin de preuve par le cas du pentagone. Tenter de faire émerger la valeur en degrés d'un tour complet et l'idée de calculer la somme des angles en chaque sommet. Après 30 minutes, confronter les résultats, puis donner une preuve si cela n'a pas encore été fait par les élèves, en remarquant que seuls les angles des trois polygones cités ont un multiple égal à 360 degrés.
Références aux contenus d'enseignement, plans d'études et moyens d'enseignement	La somme des angles d'un triangle vaut 180 degrés. La définition d'un polygone régulier, carré, triangle équilatéral, pentagone, hexagone, ... MERM géométrie 198 p.181, mesure de l'angle au sommet d'un polygone régulier.
Analyse préalable de l'activité (démarches prévisibles des élèves, interventions de l'enseignant)	Les élèves ne devraient pas rencontrer de difficultés pour observer que les carrés et les triangles équilatéraux pavent le plan. Ce manque de difficulté devrait les inciter à se contenter de l'évidence graphique pour conclure. Pour constater que l'hexagone pave, deux processus sont probables, soit comme conséquence du pavage par triangles équilatéraux, soit par juxtaposition d'hexagones. Comme il est probable que peu d'élèves calculent l'angle au sommet, une relance possible par le pentagone régulier (voir l'octogone) sera certainement nécessaire pour faire émerger le calcul d'angle.
Notions mathématiques susceptibles d'être mises en évidence	Le calcul de l'angle au sommet d'un polygone régulier. La notion d'isométrie. L'angle de 360 degrés
Développements possibles	Les groupes d'isométries d'un pavage
Liens interdisciplinaires	Les pavages en architectures sont souvent basés sur des pavages réguliers. La structure de la lave refroidie est souvent hexagonale, les rayons des abeilles sont hexagonaux.

Annexes à l'activité « Pavages par polygones réguliers »