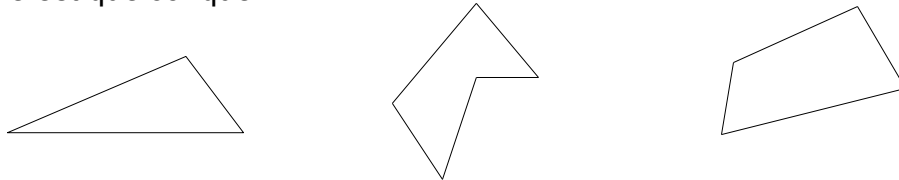


PAVAGE DU MATHÉMATICIEN

On nous dit que tous les triangles et tous les quadrilatères pavent le plan, mais en est-on bien sûr ? Si ça semble simple avec un triangle équilatéral, avec un carré ou un rectangle, il est plus difficile de s'en convaincre si le triangle est scalène ou si le quadrilatère est quelconque :



Degrés concernés

3P – 6P

Contenus et compétences mathématiques visés

Construction de figures géométriques
Transformations géométriques (translation, rotation)

Consigne / Énoncé élève

Construis un triangle (ou un quadrilatère) dont tous les côtés sont de longueurs différentes, et qui ne contient pas d'angle droit.
Peux-tu, en utilisant uniquement cette figure et sans faire de chevauchement, recouvrir entièrement une feuille ?

Proposition de déroulement

Nombre d'élèves

La classe entière, travail individuel

Matériel

Papier blanc et instruments de géométrie

Mise en œuvre

Les élèves cherchent librement la façon de construire un polygone irrégulier et de vérifier s'il pave.

Des mises en commun intermédiaires permettent de confronter les démarches et de mettre en évidence les plus efficaces.

Démarches possibles

Dessiner un polygone, le découper et l'utiliser comme chablon
Découper plusieurs exemplaires du polygone et les juxtaposer
Reproduire le polygone par dessins juxtaposés
Faire correspondre des côtés de même longueur

Difficultés potentielles

La difficulté principale se trouve dans la reproduction précise, avec des instruments de géométrie, d'une figure ayant subi une rotation. Le découpage du polygone ou l'utilisation d'un calque rend la tâche plus aisée.

Relances

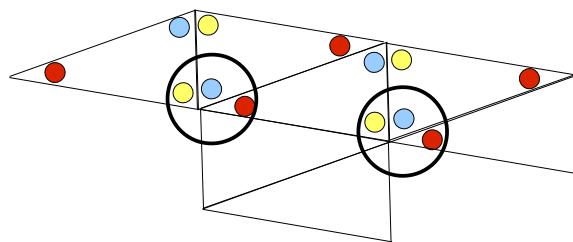
Si les élèves ne construisent que des quadrilatères convexes, l'enseignant leur montre un croquis de quadrilatère non convexe pour relancer la recherche.

Certains élèves essaient de recouvrir exactement la feuille en tenant compte des bords, ce qui n'est pas possible. L'enseignant précise alors qu'il s'agit d'un pavage qui n'a pas de bord, qui peut continuer aussi loin qu'on veut.

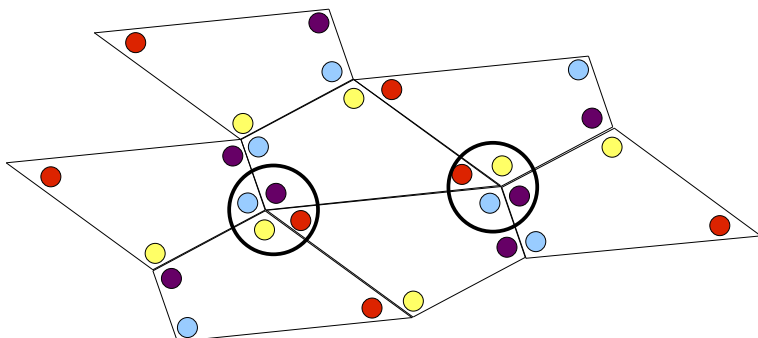
Mise en commun (6P)

L'enseignant demande aux élèves de marquer d'une même couleur tous les angles isométriques, sur une portion de leurs pavages. L'observation permet de mettre en évidence la somme des angles du triangle ou du quadrilatère :

Les 3 angles d'un triangle forment ensemble un angle plat, donc leur somme vaut 180°



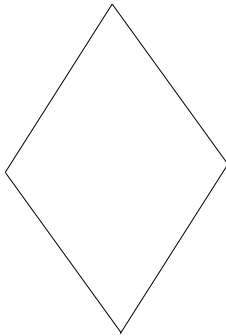
La somme des 4 angles d'un quadrilatère vaut 360°



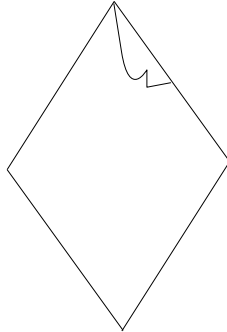
Prolongement (5P – 6P)

Déformation de polygones

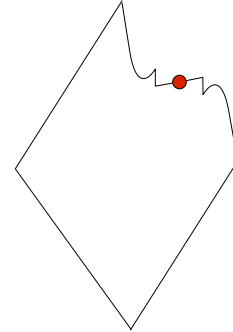
Si un polygone pave le plan, alors une figure obtenue par la méthode suivante pavera aussi le plan :



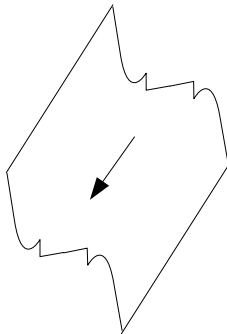
Prenons par exemple un losange



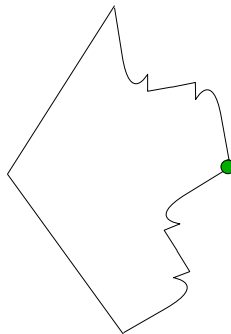
On enlève ce qu'on veut sur un des côtés ...



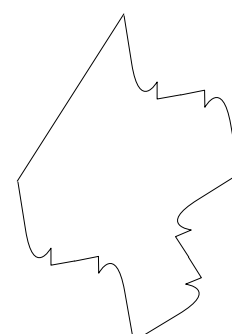
et on remet sur le même côté ce qu'on a enlevé, par une rotation de centre ●, soit le milieu du côté
(on pourrait le remettre ailleurs, par exemple sur le côté adjacent par une rotation de centre le sommet commun)



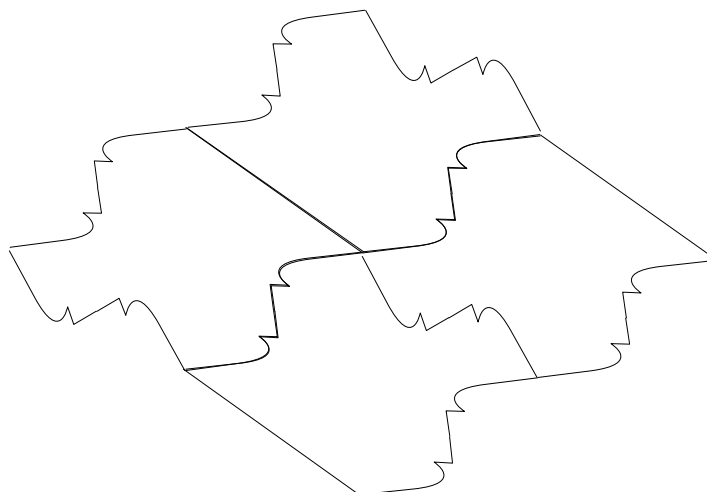
On peut effectuer une autre déformation sur chacun des côtés, ou reproduire la même par translation ...



... ou par rotation de centre ●, soit le sommet du polygone



Ou même combiner les deux



Mise en oeuvre :

Lancer l'activité par l'observation à l'écran des animations montrant des pavages du plan par déformations de polygones. Ces animations se trouvent sur <http://pagesperso-orange.fr/therese.eveilleau/> (aller dans Magie / Inventer des motifs / Déformations)

Observer en particulier les déformations par symétrie centrale, les translations, et chercher les moyens de les effectuer (découpage, papier calque). Laisser ensuite les élèves rechercher par tâtonnement le moyen de produire des figures en utilisant les mêmes procédés. La meilleure méthode pour vérifier si la figure obtenue pave (et le cas échéant pour réaliser le pavage) consiste à la découper avec précision dans un papier bristol, puis à l'utiliser comme chablon avec un crayon très fin.

Si les côtés du polygone ne sont pas isométriques, seules les déformations par symétrie centrale sur un même côté aboutissent à des figures pavant le plan.

Remarques :

- une analyse approfondie de tous les cas de figure a été publiée en 2003-2004 dans la revue Math-Ecole, n° 207 à 210
- ce procédé a été largement utilisé par l'artiste hollandais M.C. Escher, dont de nombreuses oeuvres sont visibles sur <http://www.mcescher.com/> (aller dans Picture Gallery / Symmetry)

